

Applications Lineaires

Theoreme Noyau-Image

THÉORÈME 6.1 (Noyau-Image). Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire avec V de dimension finie. On a

$$\dim V = \dim(\ker \varphi) + \dim(\operatorname{Im} \varphi).$$

COROLLAIRE 6.1 (Critere de bijectivite). Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire entre espaces de dimension finie. Si

$$\dim(V) = \dim(W)$$

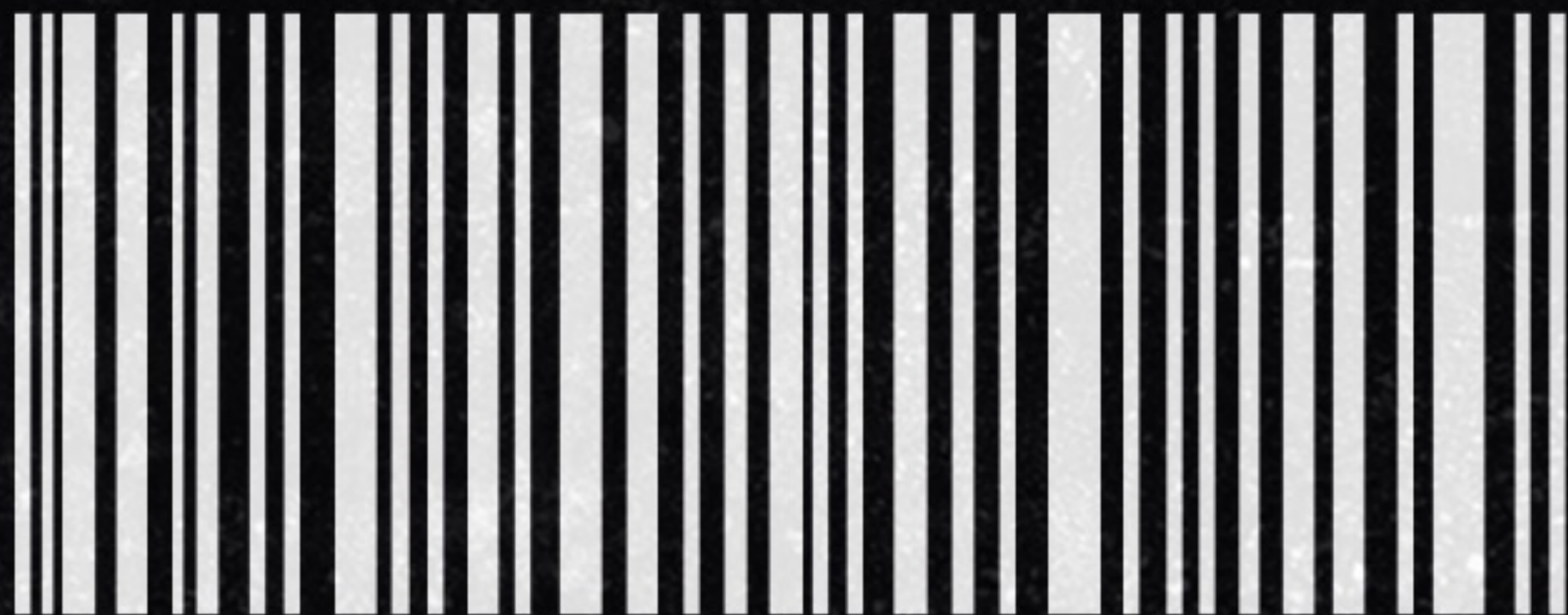
$$\Leftrightarrow W = V$$

alors est conditions suivantes sont equivalentes

- (1) φ est injective.
- (2) φ est surjective
- (3) φ est bijective.

THÉORÈME 6.2 (Dimension de l'espace des applications lineaires). *Si V et W sont de dimensions finies, alors $\text{Hom}_K(V, W)$ est de dimension finie*

$$\dim(\text{Hom}_K(V, W)) = \dim V \cdot \dim W.$$



DUALITY



SLIPKNOT - TR1BUT3

DÉFINITION 6.4. Une application linéaire, $\ell : V \mapsto K$, de V vers le corps K est appelée "forme linéaire". On note l'espace des formes linéaires par

$$V^* := \text{Hom}_{K\text{-ev}}(V, K)$$

et on l'appelle le dual de V .

DÉFINITION 6.5. Soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\}$ une base de V , si $v \in V$ s'écrit

$$v = x_1.\mathbf{e}_1 + \dots + x_d.\mathbf{e}_d,$$

pour $i \leq d$, le scalaire x_i est la i -ème coordonnée de v dans la base $\mathcal{B}$. On note ce scalaire

$$x_i = \mathbf{e}_i^*(v).$$

THÉORÈME 6.3. Soit $\mathcal{B}$ une base de V , la famille

$$\mathcal{B}^* := \{\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_d^*\} \subset V^*$$

est une base de V^* . On a

$$\forall i, j \leq d, \mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \delta_{i=j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

DÉFINITION 6.6. La base

$$\mathcal{B}^* := \{\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_d^*\} \subset V^*$$

s'appelle la base duale de la base $\mathcal{B}$.

COROLLAIRE 6.2. Soit $\ell : V \mapsto K$ une forme linéaire. On a

$$\ell = \sum_{i=1}^d \ell(\mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i^*.$$

Autrement dit, les coordonnées de ℓ dans la base $\mathcal{B}^*$ sont données par les $(\ell(\mathbf{e}_i))_{i \leq d}$ (ie. les valeurs de ℓ en chacun des $\mathbf{e}_i$, $i \leq d$).

Base de $\text{Hom}_K(V, W)$

Application linéaires élémentaires

Soit $B = \{e_1, \dots, e_d\}$ = base de V

Soit $B' = \{f_1, \dots, f_{d'}\}$ = base de W

$$d = \dim V \quad d' = \dim W$$

Soit $B^* = \{e_1^*, \dots, e_d^*\}$ la base duale de V

Pour $1 \leq i \leq d'$ $1 \leq j \leq d$ on pose

$$\varepsilon_{ij}: V \longrightarrow W$$
$$v \longrightarrow e_j^*(v) \cdot f_i$$

associe à v le multiple du i -ème
vecteur de la base B' de W
donné par la j -ième coordonnée de v .

LEMME 6.1. *L'application $\mathcal{E}_{ij} : V \mapsto W$ est linéaire, de rang 1, d'image $K.\mathbf{f}_i$ et de noyau*

$$\ker \mathcal{E}_{ij} = \langle \mathcal{B} - \{\mathbf{e}_j\} \rangle = K.\mathbf{e}_1 + \cdots + K.\mathbf{e}_{j-1} + K.\mathbf{e}_{j+1} + \cdots + K.\mathbf{e}_d$$

l'hyperplan vectoriel engendré par les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ moins le vecteur $\mathbf{e}_j$.

DÉFINITION 6.7. Soit V, W des K -EV de dimensions finies d, d' et

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\} \text{ et } \mathcal{B}' = \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{d'}\}$$

des bases de V et W et $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_d^*\} \subset V^*$ la base duale de $\mathcal{B}$.

Pour $i \leq d', j \leq d$ les applications lineaires definies par

$$\mathcal{E}_{i,j} : v \in V \mapsto \mathbf{e}_j^*(v) \cdot \mathbf{f}_i \in W$$

sont appelees applications lineaires elementaires associees aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

THÉORÈME 6.4 (Une base de l'espace des applications lineaires). La famille des applications lineaires elementaires

$$\mathcal{B}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} := \{\mathcal{E}_{ij}, i \leq d', j \leq d\} \subset \text{Hom}_{K\text{-ev}}(V, W)$$

forme une base de $\text{Hom}_{K\text{-ev}}(V, W)$.



Cette base depend des
choix de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Explicitation des Coefficients

$$\varphi \in \text{Hom}(V, W)$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{d'} \sum_{j=1}^d m_{ij} E_{ij}$$

que valent les m_{ij} en fct de
 φ et de B et B' ?

on va mg $m_{ij} = \int_{\mathcal{L}}^* (\varphi(e_j))$
 = i-eme coef de
 de l'image du j-ieme vecteur
 e_j dans la base B'

on écrit

$$\varphi(v) = \sum_i \sum_j m_{ij} \varepsilon_{ij}(v)$$

$$= \sum_v \sum_j m_{ij} e_j^z(v) \cdot f_i$$

on calcule $\varphi(e_{j_0})$ pour $j_0=1 \dots d$

$$\begin{aligned}\varphi(e_{j_0}) &= \sum_{\substack{i=1 \\ d \nmid i}}^d m_{i,j_0} e_j^k(e_{j_0}) f_i \\ &= \sum_{i=1}^d m_{i,j_0} f_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_{i,j_0} &= i\text{eme coord de } \varphi(e_{j_0}) \text{ ds la base} \\ B' &= f_i^*(\varphi(e_{j_0}))\end{aligned}$$

$$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_d\} \quad \mathcal{B}' = \{f_1, \dots, f_{d'}\}$$

$$\mathcal{B}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \{\varepsilon_{i,j} \mid i \leq d', j \leq d\}$$

DÉFINITION 6.8. L'ensemble des $d \cdot d'$ scalaires $(m_{i,j})_{i \leq d', j \leq d}$ données par

$$(6.2.2) \quad m_{i,j} = \mathbf{f}_i^*(\varphi(\mathbf{e}_j)).$$

sont les coefficients de φ dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ ou encore la matrice de φ relative aux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$.

Propriétés fonctionnelles des
coefficients d'une AL

Image d'un vecteur: But: etant donne

v un vecteur de coordonnées $(x_i)_{i \leq d}$ ds la Base B , comment calculer t'on les

les coords de $\varphi(v)$ ds la base B' ?
(a partir des coeffs $(m_{ij})_{i \leq d', j \leq d}$)

PROPOSITION 6.7. Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire et $(m_{ij})_{i \leq d', j \leq d}$ les coordonnees de φ dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$. Alors pour $k = 1, \dots, d$ le d' -uplets

$$(m_{i,k})_{i \leq d'}$$

sont les coordonnees de $\varphi(\mathbf{e}_k)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

PROPOSITION 6.8. Avec les notations precedentes, si $v = \sum_{j=1}^d x_j \mathbf{e}_j$, on a

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{d'} y_i \mathbf{f}_i \text{ avec } y_i = \sum_{j=1}^d m_{ij} \cdot x_j.$$

Preuve: on a

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \varphi\left(\sum_{j=1}^d x_j \mathbf{e}_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^d x_j \varphi(\mathbf{e}_j) \\ &= \sum_{j=1}^d x_j \sum_{i=1}^{d'} m_{ij} \mathbf{f}_i \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^d m_{ij} x_j \right) f_i$$

$$= \sum_{i=1}^d y_i f_i \quad .$$

Combinaison linéaire d'applications linéaires

PROPOSITION 6.9. Soit

$$\varphi, \psi : V \mapsto W$$

deux applications linéaires et $(m_{ij})_{i \leq d', j \leq d}$, $(n_{ij})_{i \leq d', j \leq d}$ leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$. Pour tout $\lambda \in K$, $\lambda \cdot \varphi + \psi$ est linéaire et ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ sont données par

$$(\lambda \cdot m_{ij} + n_{ij})_{i \leq d', j \leq d}.$$

Preuve : immédiat car si on a deux vecteurs φ, ψ d'un EV abstrait V de coordonnées $(m_v)_v$, $(n_v)_v$ pour $\mathcal{B} = \{\eta_1, \dots, \eta_v\}$ une base de V

alors les coef, de $\lambda \varphi + \psi$
dans B sont les

$$(\lambda m_v + n_v)_v$$

Composition d'applications lineaires

U, V, W 3 evs de dim d, d', d''

$$\varphi: U \rightarrow V \quad \psi: V \rightarrow W$$

$$\leadsto \psi \circ \varphi: U \rightarrow W$$

Soit $B = \{e_k, k \leq d\}$ = base de U

$B' = \{f_d, d \leq d'\}$ = base de V

$B'' = \{g_i, i \leq d''\}$ = base de W

En forme des base d'AL elementaires

$$B_{B', B} = \left\{ e_k^T \cdot f_d = \sum_{j,k} \delta_{jk} \quad d \leq d' \quad k \leq d \right\}$$

$$\subset \text{Hom}(V, V)$$

$$B_{B', B'} = \left\{ f_d^* \cdot g_i = \sum_{i,j} \delta_{ij} \quad i \leq d'' \quad d \leq d'' \right\}$$

$$\subset \text{Hom}(V, W)$$

$$B_{B', B} = \left\{ e_k^T \cdot g_i = \sum_{i,k} \delta_{ik} \quad i \leq d'' \quad k \leq d \right\}$$

$$\subset \text{Hom}(V, W)$$

THÉORÈME 6.5. Soient $(n_{jk})_{j \leq d', k \leq d}$ les coordonnées de φ dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ et $(m_{ij})_{i \leq d'', j \leq d'}$ les coordonnées de ψ dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}'}$. Alors les coordonnées $(l_{ik})_{i \leq d'', k \leq d}$ de $\psi \circ \varphi$ dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}}$ sont données par

$$l_{ik} = \sum_{j=1}^{d'} m_{ij} \cdot n_{jk}.$$

Preuve :

$$\varphi = \sum_{j \leq d'} \sum_{k \leq d} n_{jk} e_k \cdot f_j$$

$$\psi = \sum_{i \leq d''} \sum_{j \leq d'} m_{ij} f_j^* \cdot g_i$$

Pour tout $k \leq d$ on a

$$\varphi(e_k) = \sum_{d \leq d'} n_{dk} f_d$$

Pour tout $d \leq d'$

$$\psi(f_d) = \sum_{i \leq d''} m_{ij} g_i$$

On calcule pour $k \leq d$

$$\psi \circ \varphi(e_k) = \psi(\varphi(e_k))$$

$$\varphi\left(\sum_{d \leq d'} n_{dk} f_d\right)$$

$$= \sum_{d \leq d'} n_{dk} \varphi(f_d)$$

$$= \sum_{d \leq d'} n_{dk} \sum_{c \leq d''} m_{ij} g_i$$

$$= \sum_{c \leq d''} \left(\sum_{d \leq d'} m_{ij} n_{dk} \right) g_i$$

Pour définition des coef de $\psi \circ \varphi$

$$\psi \circ \varphi(e_k) = \sum_{i \leq d''} l_{ik} g_i$$

$$\Rightarrow l_{ik} = \sum_{j \leq d'} m_{ij} \cdot n_{jk}$$



 THE
WARNING 

Il est important pour
ce calcul que
la base B' de l'espace
intermédiaire V soit la
même quand on voit V
comme espace d'arrivée et comme
espace de départ

Application linéaire duale

$$\varphi: V \rightarrow W$$

et soit $\ell': W \rightarrow K$ $\ell' \in W^*$

on peut composer φ et ℓ'

$$v \in V \longrightarrow \ell' \circ \varphi(v) = \ell'(\varphi(v))$$

$\ell' \circ \varphi$ est linéaire (composée de 2 ALs)

et a valeurs ds K c'est une forme
linéaire sur V .

$$l' \circ \varphi \equiv: \varphi^*(l') \in V^*$$

A partir de φ on a construit une
application

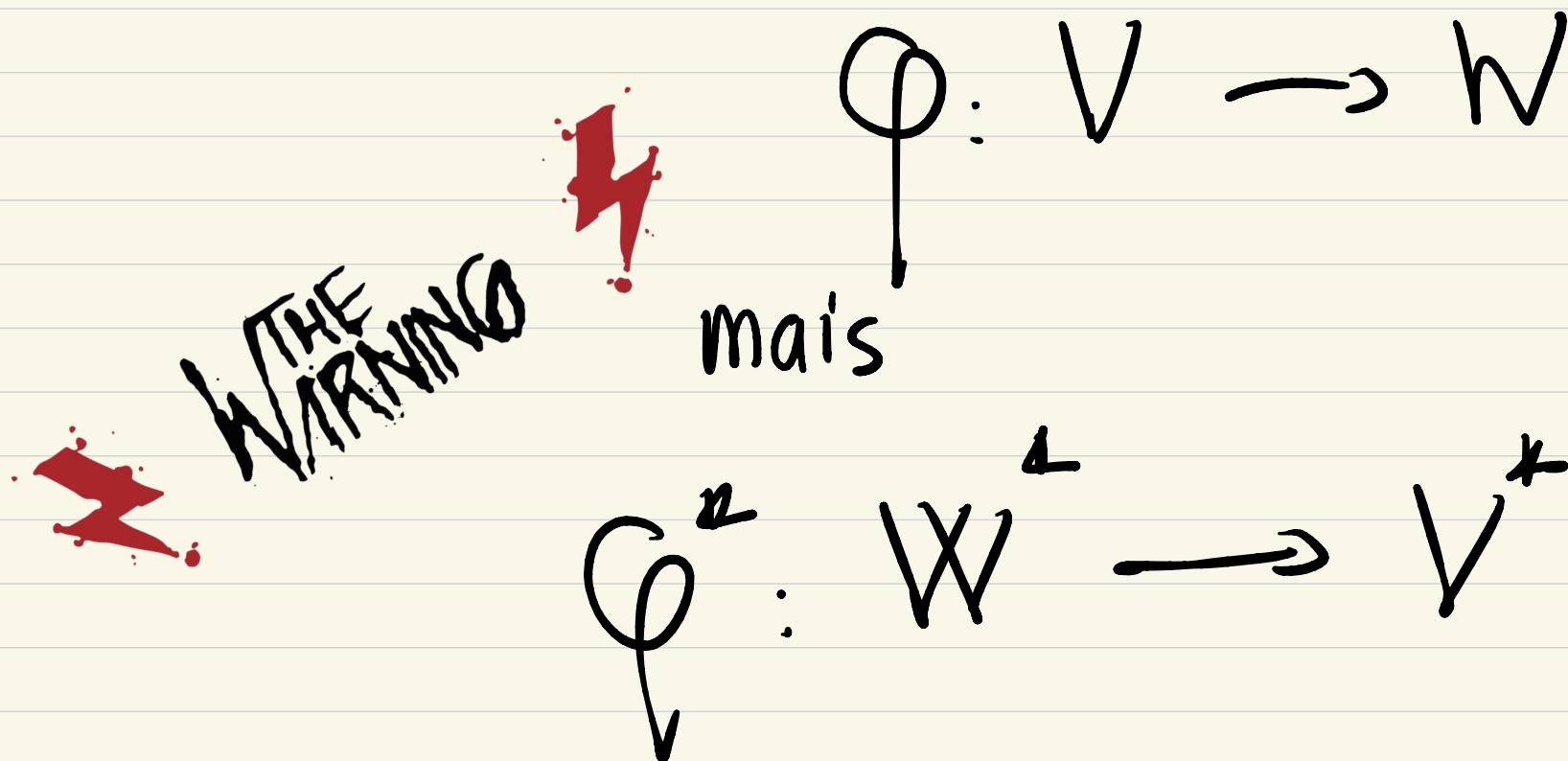
$$\begin{array}{ccc} \varphi^*: W^* & \longrightarrow & V^* \\ l' & \longmapsto & \varphi^*(l') = l' \circ \varphi \end{array}$$

DÉFINITION 6.9. Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application linéaire. L'application duale φ^* de φ est l'application

$$\varphi^* : W^* \mapsto V^*$$

qui associe à une forme linéaire $\ell' : w \in W \mapsto \ell'(w) \in K$, la forme linéaire sur V obtenue par pre-composition par φ :

$$\varphi^*(\ell') := \ell' \circ \varphi : \begin{array}{l} V \mapsto K \\ v \mapsto \ell(\varphi(v)) \end{array}.$$



Exemple $i : V \subseteq W$ un sev
↑ injection de V ds W

$$i^* : l' : W \rightarrow K \longrightarrow l' \circ i : V \rightarrow K$$

$$l' \circ i(v) = l'(i(v)) = l'(v)$$

(1)

$l' \circ i =$ C'est la restriction
à V de la fl^{ch} l' .

PROPOSITION 6.10. *L'application duale*

$$\varphi^* : \ell' \in W^* \mapsto \ell \circ \varphi \in V^*$$

est lineaire:

$$\varphi^* \in \text{Hom}_K(W^*, V^*).$$

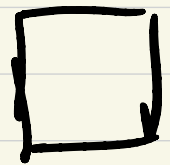
Preuve: soient $\ell'_1, \ell'_2 : W \rightarrow K$

$$\lambda \in K$$

$$\varphi^*(\lambda \ell'_1 + \ell'_2) \stackrel{g}{=} \lambda \varphi^*(\ell'_1) + \varphi^*(\ell'_2)$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } v \in V, \varphi^*(\lambda \ell'_1 + \ell'_2)(v) &= (\lambda \ell'_1 + \ell'_2)(\varphi(v)) \\ &= \lambda \ell'_1(\varphi(v)) + \ell'_2(\varphi(v)) \end{aligned}$$

$$= \lambda \varphi^{\#}(l'_1)(v) + \varphi^{\#}(l'_2)(v)$$



Exercice: $\varphi: V \rightarrow W$

(1) (Linearite) Montrer que l'application

$$\bullet^* : \varphi \in \text{Hom}(V, W) \mapsto \varphi^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$$

qui a une application lineaire associe l'application lineaire duale est elle meme lineaire:

$$(\lambda\varphi + \varphi')^* = \lambda\varphi^* + \varphi'^*$$

En d'autres termes

$$\bullet^* \in \text{Hom}(\text{Hom}(V, W), \text{Hom}(W^*, V^*)).$$

(2) (Anti-morphisme) Soit $\psi : W \mapsto Z$. Montrer que

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

(3) (Involutive) Montrer que si le bi-dual V^{**} est identifie (canoniquement) a V via l'isomorphisme

$$\text{eval}_\bullet : v \in V \mapsto (\ell \mapsto \ell(v)) \in V^{**}$$

alors la duale de la duale qu'une application est l'application elle-meme:

$$(\varphi^*)^* = \varphi.$$

THÉORÈME 6.6. Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application linéaire; $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de V et W et $(m_{ij})_{i \leq d', j \leq d}$ les coefficients de φ dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ et $(m_{ji}^*)_{j \leq d, i \leq d'}$ les coefficients de φ^* dans la base associée aux bases duales

$$(\mathcal{B}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}})^* = \mathcal{B}_{\mathcal{B}^*, \mathcal{B}'^*} = \text{base de } \text{Hom}(W^*, V^*)$$

on a

$$m_{ji}^* = m_{ij}, \quad i \leq d', \quad j \leq d.$$

Preuve Soient m_{ji}^* les coefs de φ^*
dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{B}^*, \mathcal{B}'^*}$

On a par une formule general applique

$$\varphi^*(\varphi^*(f_i^*)) = \sum_{j=1}^d m_{ji}^* e_j^*$$

soit $j' \in \{1, \dots, d\}$

$$\varphi^*(\varphi^*)(e_{j'}) = \sum_{j=1}^d m_{j,j'}^* e_j^*(e_{j'})$$

$$= \varphi^*(\varphi(e_{j'})) = \varphi^*\left(\sum_{i=1}^{d'} m_{i,j'} f_{i'}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{d'} m_{i,j'} \varphi^*(f_{i'}) = m_{i,j'} \quad \square$$

THÉORÈME 6.7 (Rang de l'application duale). *Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application linéaire et $\varphi^* : W^* \mapsto V^*$ sa duale, alors on a*

$$\operatorname{rg}(\varphi) = \dim(\operatorname{Im} \varphi) = \dim(\operatorname{Im} \varphi^*) = \operatorname{rg}(\varphi^*).$$

Preuve: Soit $r = \text{rg}(\varphi) = \dim \text{Im}(\varphi)$
 $r^* = \text{rg}(\varphi^2) = \dim \text{Im}(\varphi^2)$

$$\text{Im}(\varphi) \subset W \quad \text{Im}(\varphi^*) \subset V^*$$

Soit $\{f_1, \dots, f_r\}$ base de $\text{Im } \varphi$
et $\{f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_d\}$ une base de W
complétée.
 B'

par définition de l'image

$i=1, \dots, r$ $f_i = \varphi(e_i)$ $\{e_1, \dots, e_r\}$ est libre
et $\{e_{r+1}, \dots, e_d\}$ est une base de $\ker \varphi$

alors $\{e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_d\} = B =$ base de V

on note $\left. \begin{array}{l} \{e_1^*, \dots, e_d^*\} = B^* \\ \{f_1^*, \dots, f_{d-r}^*\} = B'^* \end{array} \right\} \text{ les bases duales}$

on a que $r^* = \dim \text{Vect}(\{\varphi^*(f_1^*), \dots, \varphi^*(f_{d'}^*)\})$

On écrit pour $i=1 \dots d'$

$$\varphi^*(f_i^*) = \sum_{j=1}^d m_{ji} e_j^* = \sum_{j=1}^d m_{ij} e_j^*$$

par le Thm précédent

avec m_{ij} défini par $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{d'} m_{ij} f_i$

si $d > r$ $e_d \in \ker \varphi$

$$\varphi(e_d) = 0 = \sum_{i=1}^r m_{id} f_i$$

$\Rightarrow$ si $d > r$ $\forall i=1 \dots r$ $m_{id} = 0$

$$\varphi^*(f_i) = \sum_{d=1}^r m_{id} e_d$$

$\varphi^*(f_i)$ appartient au SEV Vect $\{e_d \mid d \leq r\}$

$$\begin{aligned}
 \text{Im}(\varphi^*) &= \text{Vect}\{\varphi^*(f_1), \dots, \varphi^*(f_{d'})\} \\
 &\subset \text{Vect}\{e_1^*, \dots, e_r^*\} \quad \dim = r
 \end{aligned}$$

$$\dim \varphi^* \leq r$$

De plus pour $i \leq r$

$$\varphi^*(f_i^e) = \sum_{j=1}^r m_{ij} e_j^*$$

$$m_{ij} = \int_i^* (\varphi(e_j)) = \int_i^* (f_j) = \delta_{i=j}$$

$$\varphi^*(f_i^*) = e_i^*$$

et donc $\{e_1^*, \dots, e_r^*\}$ est une famille

libre de $\text{Im } \varphi^*$

$$\Rightarrow \dim \text{Im } \varphi^* \underset{r^*}{\geq} r$$



FREE YOUR MIND

THE MATRIX

- *M: Do you know what I'm talking about ?*

- *N: The Matrix ?*

- *M: Do you want to know what IT is ?*

*The Matrix is everywhere. It is all around us.
Even now, in this very room.*

Matrices et ALs

V W des K -ev de dim d, d'
 $\overset{U}{B}$ $\overset{U'}{B'}$ des bases

On a construit des isomorphismes

$$CL_B: K^d \xrightarrow{\sim} V$$

$$CL_{B'}: K^{d'} \xrightarrow{\sim} W$$

On a également construit une base

$B_{B', B}$ de $\text{Hom}(V, W)$

(formée d'AL élémentaires)
 $E_{ij} \quad i \leq d', j \leq d$)

et donc un isomorphisme

$$CL_{B_{B', B}} : (K^{d'})^d \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(V, W)$$
$$(m_{ij})_{i \leq d', j \leq d} \mapsto \sum_{i=1}^{d'} \sum_{j=1}^d m_{ij} E_{ij}$$

Cet isomorphisme permet de "coder"
toute AL $\varphi: V \rightarrow W$ par une ensemble
fini de scalaires $(m_{ij}(\varphi))_{i \leq d', j \leq d}$

DÉFINITION 7.1. L'espace vectoriel $(K^{d'})^d$ s'appelle l'espace des matrices de dimension $d' \times d$ à coefficients dans K et est noté

$$M_{d' \times d}(K) = \{(m_{ij})_{i \leq d', j \leq d}, m_{ij} \in K\}.$$

Un élément de $M_{d' \times d}(K)$ est appelé matrice de dimensions $d' \times d$ ou juste une matrice $d' \times d$.

$$M = (m_{ij})_{i \leq d', j \leq d} = \begin{matrix} i \\ \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & m_{ij} & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix} \right. \end{matrix}.$$

 **⚡ THE WARNING ⚡**

la première coordonnée i donne la ligne à laquelle appartient m_{ij} et la 2^{ème} coordonnée donne la colonne à laquelle appartient m_{ij}

DÉFINITION 7.2. Soient $\mathcal{B} \subset V$, $\mathcal{B}' \subset W$ des bases comme ci-dessous et $\mathcal{B}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \subset \text{Hom}(V, W)$ la base de $\text{Hom}(V, W)$ associée. L'application réciproque $CL_{\mathcal{B}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}}^{-1}$ sera également notée

$$\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} : \text{Hom}(V, W) \mapsto M_{d' \times d}(K).$$

Explicitement, si on a la décomposition $\varphi = \sum_{i \leq d'} \sum_{j \leq d} m_{ij}(\varphi) \mathcal{E}_{ij}$ alors on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\varphi) = (m_{ij}(\varphi))_{i \leq d', j \leq d} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix}.$$

La matrice $\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\varphi)$ est appelée matrice associée à φ dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$. Rappelons que pour tout $1 \leq j \leq d$, $(m_{i,j}(\varphi))_{i \leq d'}$ est l'ensemble des coordonnées de l'image $\varphi(\mathbf{e}_j)$ de $\mathbf{e}_j \in \mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$: ie.

$$\varphi(\mathbf{e}_j) = \sum_{1 \leq i \leq d'} m_{ij}(\varphi) \mathbf{f}_i.$$

Examples

Matrice nulle

$$O_{d' \times d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \right\} d' \\ \underbrace{\hspace{10em}}_d$$

Matrices elementaires, $E_{ij} = \text{mat}_{B', B}(\varepsilon_{ij})$

$$m_{ij}(E_{ij}) = 1 \quad i$$

$$m_{i'j'}(E_{ij}) = 0 \\ \text{is } (i', j') \neq (i, j)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & 1 & \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 d

Comme les $\{E_{ij}, i \leq d', j \leq d\}$ forment
une base de $\text{Hom}(V, W)$

les $\{E_{ij}, i \leq d', j \leq d\}$ forment
une base de $\text{Mat}_{d' \times d}(K)$

Cette base est appelée
base canonique de $\text{Mat}_{d' \times d}(K)$
et notée $B_{d' \times d}^0 = \{E_{ij}, i \leq d', j \leq d\}$.

la base dual

$$B_{d' \times d}^{0,*} = \{ E_{ij}^* \mid i \leq d', j \leq d \}$$

est la base des formes linéaires

$$E_{ij}^* : M_{d' \times d}(K) \rightarrow K$$

qui a une matrice

$$E_{ij}^* : m = (m_{ij})_{i \leq d', j \leq d} \mapsto m_{ij} \in K$$

A mathematician is a machine
which transforms coffee
into Theorems

Paul Erdős

Carrières $\dim W = \dim V = d$

les matrices sont $d \times d$ et sont
carrées

Cas fondamental $W = V$

$$\text{Hom}(V, V) = \text{End}(V)$$

Identité / Scalaire

$$\begin{array}{l} \text{Id}_V : V \longrightarrow V \\ v \longrightarrow v \end{array} \quad B = B'$$

Dans ce cas

$$\text{mat}_{BB}(\text{Id}_V) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \textcircled{0} & \\ & \textcircled{0} & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} =: \text{Id}_d$$

⚡ THE
WARNING

⚡ $S_1 \quad B' \neq B$

$$\text{mat}_{B'B}(\text{Id}_V) \neq \text{Id}_d$$

Multiplication par les scalaires:

$$\lambda \in K : [\times \lambda] : v \in V \longrightarrow \lambda \cdot v \in V$$

$$B' = B$$

$$\text{mat}_{BB}([\times \lambda]) = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \bigcirc & \\ & & \diagdown & \\ \bigcirc & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Colonnes: $d=1$

$$M_{d' \times 1}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{d'1} \end{pmatrix} \quad m_{i1} \in K \right\} = \text{Col}_{d'}(K)$$

Lignes: $d'=1$. Codent $V^* = \text{Hom}(V, K)$

$$M_{1 \times d}(K) = \left\{ (m_{11} \ m_{12} \ \dots \ m_{1d}) \quad m_{1j} \in K \right\} \\ = \text{Lig}_d(K)$$

Lignes

DÉFINITION 7.3. Soient $\mathcal{B} \subset V$, $\mathcal{B}' \subset W$ des bases. Soit

$$v = x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + x_d \cdot \mathbf{e}_d \in V$$

un vecteur décomposé dans la base $\mathcal{B}$. Alors la matrices

$$\text{Col}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}, \quad \text{Lig}_{\mathcal{B}}(v) = (x_1 \quad \cdots \quad x_d)$$

sont appelées respectivement

- la matrice colonne associée à v dans la base $\mathcal{B}$,
- La matrice ligne associée à v dans la base $\mathcal{B}$,

Ces applications sont des isomorphismes entre V et $\text{Col}_d(K)$ et $\text{Lig}_d(K)$.

Extraction de lignes / colonnes d'une matrice

DÉFINITION 7.4. Soit une matrice

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ m_{d'1} & m_{d'2} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix} \in M_{d' \times d}(K).$$

Pour $j \leq d$ (resp. $i \leq d'$), la j -ième colonne de M (resp. la i -ième ligne de M) est la matrice colonne (resp. ligne)

$$\text{Col}_j(M) = \begin{pmatrix} m_{1j} \\ m_{2j} \\ \vdots \\ m_{d'j} \end{pmatrix} \in \text{Col}_{d'}(K), \text{ resp. } \text{Lig}_i(M) = (m_{i1} \ m_{i2} \ \cdots \ m_{id}) \in \text{Lig}_d(K)$$

Ces extractions de la i -ième ligne, j -ième colonne
sont linéaires:

$$M_{d' \times d}(K) \mapsto \text{Col}_{d'}(K) \mapsto \text{Lig}_d(K)$$

Structure des Espaces de matrices

Addition et $\times$ par les scalaires

$M_{d' \times d}(K)$ est un K -ev où l'addition est donnée par

$$m = (m_{ij})_{ij} \quad n = (n_{ij})_{ij} \in M_{d' \times d}(K)$$

$$m + n := (m_{ij} + n_{ij})_{ij}$$

$$\lambda \in K \quad \lambda \cdot m = (\lambda m_{ij})_{ij}$$

Ces Lois sur $M_{d' \times d}(K)$ sont celles
telles que

$\text{mat}_{B'B} : \text{Hom}(V, W) \longrightarrow M_{d' \times d}(K)$
soit un isom de K -ev.

Multiplication des matrices

Si U, V, W
 B', B, B''

$B_{B', B}$ $B_{B'', B'}$ $B_{B'', B}$

si $\varphi: U \rightarrow V$ $\psi: V \rightarrow W$
 $\psi \circ \varphi: U \rightarrow W$

$$s. \quad N = \text{mat}_{B', B}(\varphi) = (n_{j,k})_{j \leq d', k \leq d}$$

$$M = \text{mat}_{B'', B'}(\psi) = (m_{i,j})_{i \leq d'', j \leq d'}$$

$$L = \text{mat}_{B'', B}(\psi \circ \varphi) = (l_{i,k})_{i \leq d'', k \leq d}$$

on a

$$l_{i,k} = \sum_{j=1}^{d'} m_{i,j} \cdot n_{j,k}$$

DÉFINITION 7.5. Soient $d, d', d'' \geq 1$ et $M \in M_{d'' \times d'}(K)$, $N \in M_{d' \times d}(K)$, on définit le produit des matrices M et N comme étant la matrice

$$L := M.N \in M_{d'' \times d}(K)$$

avec

$$L = (l_{ik})_{i \leq d'', k \leq d} \in M_{d'' \times d}(K) \text{ et } l_{ik} := \sum_{j=1}^{d'} m_{ij} \cdot n_{jk}.$$

Soient $d, d', d'' \geq 1$, on a donc défini une application "produit de matrices"

$$(7.2.1) \quad \begin{aligned} \bullet \bullet : M_{d'' \times d'}(K) \times M_{d' \times d}(K) &\mapsto M_{d'' \times d}(K) \\ (M, N) &\mapsto L = M.N \end{aligned}$$

Pour définir le produit de
2 matrices, il faut que
la 2^{ème} dim de la 1^{ère} matrice
soit = à la 1^{ère} dim de la 2^{ème} matrice

W THE
WARNING

$$\begin{array}{c}
 \text{N : } d' \text{ lignes } d \text{ colonnes} \\
 \left(\begin{array}{cccc}
 n_{11} & \dots & n_{1k} & \dots & n_{1d} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 n_{j1} & \dots & n_{jk} & \dots & n_{jd} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 n_{d'1} & \dots & n_{d'k} & \dots & n_{d'd}
 \end{array} \right) = N
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{M : } d'' \text{ lignes } d' \text{ colonnes} \\
 \left(\begin{array}{cccc}
 m_{11} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1d'} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 m_{i1} & \dots & m_{ij} & \dots & m_{id'} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 m_{d''1} & \dots & m_{d''j} & \dots & m_{d''d'}
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{L = M} \times \text{N : } d'' \text{ lignes } d \text{ colonnes} \\
 \left(\begin{array}{cccc}
 l_{11} & \dots & l_{1k} & \dots & l_{1d} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 l_{i1} & \dots & l_{ik} & \dots & l_{id} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 l_{d''1} & \dots & l_{d''k} & \dots & l_{d''d}
 \end{array} \right) = L
 \end{array}$$

The diagram illustrates the matrix multiplication $L = M \times N$. The matrix N (top right) has d' rows and d columns. The matrix M (bottom left) has d'' rows and d' columns. The resulting matrix L (bottom right) has d'' rows and d columns. The element l_{ik} in L is highlighted in red. Handwritten annotations show the calculation of l_{ik} as the dot product of the i -th row of M and the k -th column of N :

$$m_{i1} \cdot n_{1k} + m_{i2} \cdot n_{2k} + \dots + m_{id'} \cdot n_{d'k}$$
 Arrows indicate the mapping from the i -th row of M and the k -th column of N to the ik element in L .

Examples: $d=1$ $M_{d' \times 1}(K) = \text{Col}_{d'}(K)$

$$M \in M_{d'' \times d'} \quad N \in M_{d' \times 1}(K) \rightarrow L \in M_{d'' \times 1}(K)$$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_{d'} \end{pmatrix} \quad \text{Col}_{d'}(K)$$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1d'} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11}n_1 + m_{12}n_2 + \dots + m_{1d'}n_{d'} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \in \text{Col}_{d''}$$

$d'' = d' = d: M_{d \times d}(K) \times M_{d \times d}(K) \hookrightarrow M_{d \times d}(K)$

la multiplication des matrices est
une loi interne

C'est le seul cas où on obtient
une multiplication interne.

$\Leftrightarrow$ Composition dans $\text{End}(V)$

THÉORÈME 7.1 (Propriétés fonctionnelles du produit de matrices). Soient $d, d', d'' \geq 1$ et $M_{d'' \times d'}(K)$, $M_{d' \times d}(K)$, $M_{d'' \times d}(K)$ les espaces de matrices correspondants.

L'application "produit de matrices"

$$\begin{aligned} M_{d'' \times d'}(K) \times M_{d' \times d}(K) &\mapsto M_{d'' \times d}(K) \\ (M, N) &\mapsto M.N \end{aligned}$$

a les propriétés suivantes

(1) Distributive à gauche: pour $\lambda \in K$, $M, M' \in M_{d'' \times d'}(K)$, $N \in M_{d' \times d}(K)$,

$$(\lambda.M + M').N = \lambda.M.N + M'.N.$$

(2) Distributive à droite: pour $\lambda \in K$, $M \in M_{d'' \times d'}(K)$, $N, N' \in M_{d' \times d}(K)$,

$$M.(\lambda.N + N') = \lambda.M.N + M.N'.$$

(3) Neutralité de l'identité: pour $M \in M_{d'' \times d'}(K)$,

$$\text{Id}_{d''}.M = M, \quad M.\text{Id}_{d'} = M$$

(4) La matrice nulle est absorbante: pour $M \in M_{d'' \times d'}(K)$,

$$\underline{0}_{d''d''}.M = \underline{0}_{d''d''}, \quad M.\underline{0}_{d'd} = \underline{0}_{d''d}.$$

(5) Associativité: Soit $d''' \geq 1$ et $L \in M_{d''' \times d''}(K)$, $M \in M_{d'' \times d'}(K)$, $N \in M_{d' \times d}(K)$ alors

$$(L.M).N = L.(M.N) \in M_{d''' \times d}(K)$$

Preuve